10 Sucesiones

PIENSA Y DECIDE

En el texto aparece el término “lista” en una acepción muy concreta. Busca algún otro sinónimo.

Sinónimos de lista son relación, serie, sucesión…

Busca algún otro ejemplo de listas de números que evolucionen mediantes sumas y otras mediante productos.

Respuesta libre

ANALIZA Y SACA CONCLUSIONES

¿Qué sueldos corresponden a los días quinto y sexto en cada uno de los contratos?

El sueldo correspondiente al quinto día, con el contrato ARI, es 5000 € y, el sexto, 6000 €.

Con el contrato GEO, el sueldo correspondiente al quinto día es 0,16 € y, el sexto, 0,32 €.

¿Qué sueldo elegirías? Busca argumentos a favor y en contra de cada uno de ellos.

Si el contrato durara 25 días, con el contrato ARI se cobraría 350 000 € y, con el contrato GEO, 335 544,31 €.

Si el contrato durara 26 días, con el contrato ARI se cobraría 377 000€ y, con el contrato GEO, 671 088,63 €.

Por tanto, si el contrato durara 25 días o menos elegiría el sueldo ARI. En cambio, si el contrato durara 26 o más días, elegiría el contrato GEO.

Actividades propuestas

1. Calcula los tres primeros términos y el término décimo de las sucesiones:

$\boldsymbol{a_n = n^2 - 3n}$ $\qquad$ $\boldsymbol{b_n = n - \frac{24}{n}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{c_n = (-1)^n}$

$a_1 = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2$ $\qquad$ $b_1 = 1 - \frac{24}{1} = -23$ $\qquad$ $c_1 = (-1)^1 = -1$

$a_2 = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2$ $\qquad$ $b_2 = 2 - \frac{24}{2} = -10$ $\qquad$ $c_2 = (-1)^2 = 1$

$a_3 = 3^2 - 3 \cdot 3 = 0$ $\qquad$ $b_3 = 3 - \frac{24}{3} = -5$ $\qquad$ $c_3 = (-1)^3 = -1$

$a_{10} = 10^2 - 3 \cdot 10 = 70$ $\qquad$ $b_{10} = 10 - \frac{24}{10} = \frac{38}{5}$ $\qquad$ $c_{10} = (-1)^{10} = 1$

2. Escribe en tu cuaderno los tres términos siguientes de estas sucesiones.

a) **1, 3, 6, 10, 15…** $\qquad$ **b)** $\boldsymbol{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}}$**...** $\qquad$ **c)** **10, 1, –8, –17…** $\qquad$ **d)** $\boldsymbol{\frac{7}{5}, \frac{4}{10}, \frac{1}{15}, \frac{-2}{20}}$**...**

a) 21, 28 y 36 $\qquad$ **b)** $\frac{1}{48}, \frac{1}{96}$ y $\frac{1}{192}$ $\qquad$ **c)** –26, –35, –44 $\qquad$ **d)** $\frac{-5}{25}, \frac{-8}{30}$ y $\frac{-11}{35}$

3. Escribe el término general y los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones.

a) A cada número natural le corresponde su cubo más dos unidades.

b) A cada número natural le corresponde el cuadrado de su anterior.

c) El primer término es 1 y cada uno de los siguientes es el doble del anterior más 1.

a) $a_n = n^3 + 2$

$a_1 = 1^3 + 2 = 3$

$a_2 = 2^3 + 2 = 10$

$a_3 = 3^3 + 2 = 29$

$a_4 = 4^3 + 2 = 66$

$a_5 = 5^3 + 2 = 127$

b) $b_n = (n - 1)^2$

$b_1 = (1 - 1)^2 = 0$

$b_2 = (2 - 1)^2 = 1$

$b_3 = (3 - 1)^2 = 4$

$b_4 = (4 - 1)^2 = 9$

$b_5 = (5 - 1)^2 = 16$

c) $c_n = 2 \cdot c_{n-1} + 1, n > 2$

$c_1 = 1$

$c_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$c_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$c_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

$c_5 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$

4. Calcula los seis primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia.

a) $a_1 = 6, a_n = a_{n-1} + n$

b) $b_1 = 2, b_2 = 3, b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$

c) $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 1, c_n = 2c_{n-3} + c_{n-1}$

a) $a_1 = 6$

$a_2 = a_1 + 2 = 6 + 2 = 8$

$a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

$a_4 = a_3 + 4 = 11 + 4 = 15$

$a_5 = a_4 + 5 = 15 + 5 = 20$

$a_6 = a_5 + 6 = 20 + 6 = 26$

b) $b_1 = 2$

$b_2 = 3$

$b_3 = b_1 + b_2 = 2 + 3 = 5$

$b_4 = b_2 + b_3 = 3 + 5 = 8$

$b_5 = b_3 + b_4 = 5 + 8 = 13$

$b_6 = b_4 + b_5 = 8 + 13 = 21$

c) $c_1 = -1$

$c_2 = 2$

$c_3 = 1$

$c_4 = 2c_1 + c_3 = -2 + 1 = -1$

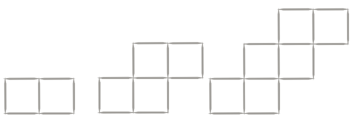
$c_5 = 2c_2 + c_4 = 4 - 1 = 3$

$c_6 = 2c_3 + c_5 = 2 + 3 = 5$

5. Encuentra el término general de estas sucesiones:

(a_n) = (6, 11, 16, 21…)	**(b_n) = (1, 4, 9, 16…)**	**(c_n) = (2, 6, 12, 20…)**	**(d_n) = (2, 6, 14, 30…)**
$a_n = 1 + 5n$	$b_n = n^2$	$c_n = n^2 + n$	$d_n = 2^{(n+1)} - 2$

6. Santos está construyendo una escalera con palitos. En el dibujo se observa cómo está levantando la escalera.



¿Cuántos palitos necesitará Santos para formar una escalera con 148 escalones?

Para el primer escalón se necesitan 7 palitos, para el segundo 13, para el tercero 19…

Se forma la sucesión (a_n) = (7, 13, 19…), cuyo término general es $a_n = 6n + 1$.

Para calcular el número de palitos que se necesitarán para construir una escalera con 148 escalones hay que hallar el término 148 de la sucesión.

Por tanto, se necesitarán $a_{148} = 6 \cdot 148 + 1 = 889$ palitos.

7. Actividad resuelta

8. Encuentra la ley de recurrencia de estas sucesiones, en función de los dos términos anteriores.

a) $(a_n) = (5, 9, 4, -5, -9, -4, 5...)$ para $n > 2$

b) $(b_n) = (1, 4, 6, 14, 26, 54, 106...)$ para $n > 2$

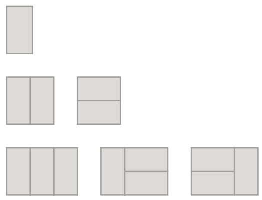
c) $(c_n) = (1, 3, -1, 7, -9, 23, -41...)$ para $n > 2$

a) $a_1 = 5$, $a_2 = 9$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

b) $b_1 = 1$, $b_2 = 4$, $b_n = 2b_{n-2} + b_{n-1}$

c) $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_n = 2c_{n-2} - c_{n-1}$

9. Con ladrillos que miden 2 × 1 cm podemos construir una pared de 2 cm de alto de distintas maneras según el largo de la pared. Si queremos que sea de 1 cm de largo, solo podemos hacerlo de una forma. Si la queremos hacer de 2 cm de largo, tenemos dos opciones, etc.



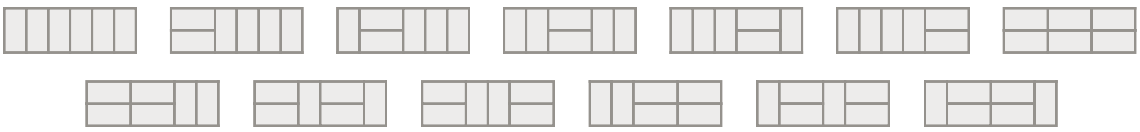
a) ¿Cuántas formas hay de hacer un muro de 6 cm de largo?

b) ¿De qué tipo es la sucesión que se va formando? Encuentra su ley de recurrencia.

a) Para construir un muro de 6 cm de largo los ladrillos se pueden poner de la siguiente forma:

- Todos los ladrillos verticales.
- 2 ladrillos horizontales y 4 verticales. Intercalando los 2 ladrillos horizontales entre los verticales, se consiguen 5 formas distintas de colocarlos.
- 4 ladrillos horizontales y 2 verticales. Intercalando los 2 ladrillos horizontales entre los verticales, se consiguen 6 formas distintas de colocarlos.
- Todos los ladrillos horizontales.

Las distintas formas que hay de hacer un muro de 6 cm de largo son las siguientes:



En total hay 1 + 5 + 6 + 1 = 13 formas distintas de hacer un muro de 6 cm de largo.

b) Para construir un muro de 1 cm de largo hay 1 forma, para un muro de 2 cm hay 2 formas, para un muro de 3 cm hay 3 formas, para un muro de 4 cm hay 5 formas, para un muro de 5 cm hay 8 formas, para un muro de 6 cm hay 13 formas…

Se forma la sucesión $(a_n) = (1, 2, 3, 5, 8, 13...)$. Cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores.

Por tanto, la ley de recurrencia es $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

10. Identifica si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas.

a) 4, 7, 10, 13, 16, 19…

b) –2, –1, 0, 3, 5, 7…

a) Sí que es una progresión aritmética, porque al restar a cada término su anterior siempre se obtiene el mismo valor, 3.

b) No es una progresión aritmética, porque al restar a cada término su anterior no siempre se obtiene el mismo valor: $a_2 - a_1 = 1$ y $a_4 - a_3 = 3$.

11. Halla el valor de la diferencia en las siguientes progresiones aritméticas.

a) $(a_n) = (3, 10, 17, 24\ldots)$

b) $(b_n) = (1, -1, -3, -5\ldots)$

c) $(c_n) = (5, 2, -1, -4\ldots)$

d) $(d_n) = (-21, -10, 1, 12\ldots)$

a) $d = 10 - 3 = 7$

b) $d = -1 - 1 = -2$

c) $d = 2 - 5 = -3$

d) $d = -10 - (-21) = 11$

12. El primer término de una progresión aritmética es $a_1 = 100$ y su diferencia es $d = -8$.

a) Encuentra su término general.

b) ¿Qué lugar ocupa el primer término negativo de la progresión?

a) $a_n = 100 + (n - 1) \cdot (-8) = 100 - 8n + 8 = 108 - 8n$

b) $108 - 8n = 0 \Rightarrow n = 13{,}5$. El primer término negativo de la progresión es el término 14.

13. Actividad resuelta

14. Calcula el término general de una progresión aritmética, dados los términos.

a) $a_3 = 15$ y $a_9 = 27$

b) $a_6 = -7$ y $a_{12} = -12$

a) Sustituyendo en la fórmula del término general, se obtiene:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a_3 = a_1 + 2d \\ a_9 = a_1 + 8d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15 = a_1 + 2d \\ 27 = a_1 + 8d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 11 \\ d = 2 \end{cases}$$

$a_n = 11 + (n - 1) \cdot 2 = 11 + 2n - 2 = 9 + 2n$

b) Sustituyendo en la fórmula del término general, se obtiene:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a_6 = a_1 + 5d \\ a_{12} = a_1 + 11d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 = a_1 + 5d \\ -12 = a_1 + 11d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\dfrac{17}{6} \\ d = -\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

$$a_n = -\frac{17}{6} + (n-1) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{17}{6} - \frac{5n}{6} + \frac{5}{6} = -2 - \frac{5n}{6}$$

15. Calcula la suma de:

a) Los veinte primeros múltiplos de 3.

b) Los trece primeros números que acaban en 13.

c) Los números del 1 al 100.

a) $(a_n) = (0, 3, 6, 9, 12...) \Rightarrow a_n = 3n$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{30} = 90 \end{cases} \Rightarrow S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{0 + 90}{2} \cdot 30 = 1350$$

b) $(a_n) = (13, 113, 213, 313, 413...) \Rightarrow a_n = 13 + (n - 1) \cdot 100 = 13 + 100n - 100 = 100n - 87$

$$\begin{cases} a_1 = 13 \\ a_{13} = 1213 \end{cases} \Rightarrow S_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2} \cdot 13 = \frac{13 + 1213}{2} \cdot 13 = 7969$$

c) $(a_n) = (1, 2, 3, 4, 5...) \Rightarrow a_n = n$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{100} = 100 \end{cases} \Rightarrow S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = 5050$$

16. Un contrato anual consiste en un sueldo de 1200 € el primer mes, que se irán incrementando en 50 € cada mes que pasa. ¿Cuál es el sueldo del primer año de trabajo según este contrato?

Se trata de una progresión aritmética, porque la diferencia de salario de dos meses consecutivos es siempre 50 €. El término general es $a_n = 1200 + (n - 1) \cdot 50 = 1200 + 50n - 50 = 1150 + 50n$.

Para saber cuánto ha ganado el primer año de trabajo, se calcula la suma de los doce primeros términos:

$$\begin{cases} a_1 = 1200 \\ a_{12} = 1750 \end{cases} \Rightarrow S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{1200 + 1750}{2} \cdot 12 = 17\,700$$

El sueldo del primer año de trabajo ha sido 17 700 €.

17. De una progresión aritmética conocemos su diferencia $d = -5$ y $a_{10} = 31$.

a) Calcula el primer término.

b) Calcula su término general.

c) Calcula la suma de los diez primeros términos.

a) $a_1 = 76$

$$\begin{cases} a_{10} = 31 \\ a_{10} = a_1 + 9d \end{cases} \Rightarrow 31 = a_1 + 9 \cdot (-5) \Rightarrow 31 = a_1 - 45 \Rightarrow a_1 = 31 + 45 = 76$$

b) $a_n = 76 + (n - 1) \cdot (-5) = 76 - 5n + 5 = 81 - 5n$

c) $S_{10} = 535$

$$\begin{cases} a_1 = 76 \\ a_{10} = 31 \end{cases} \Rightarrow S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{76 + 31}{2} \cdot 10 = 535$$

18. Actividad resuelta

19. Si el término general de una progresión aritmética es $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3$, ¿cuántos términos son necesarios para que la suma sea 1107?

$$\begin{cases} S_x = 1107 \\ a_x = 2 + (x-1) \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow S_x = \frac{2 + a_x}{2} \cdot x = \frac{2 + 2 + (x-1) \cdot 3}{2} \cdot x = \frac{x + 3x^2}{2} \Rightarrow 1107 = \frac{x + 3x^2}{2} \Rightarrow 2214 = x + 3x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 + x - 2214 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 163}{6} = \begin{cases} 27 \\ -\dfrac{164}{6} \end{cases}$$

Se necesitan 27 términos para que la suma sea 1107.

20. Actividad resuelta

21. En una progresión geométrica $a_1 = 800$ y $r = 0{,}02$.

a) Encuentra su término general.

b) ¿Cuál es el término vigésimo?

a) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, $a_n = 800 \cdot 0{,}02^{(n-1)}$

b) $a_{20} = 800 \cdot 0{,}02^{(20-1)} = 4{,}19 \cdot 10^{-30}$

22. Calcula el décimo término de las sucesiones:

a) $(a_n) = (2, 4, 8, 16\ldots)$

b) $(b_n) = (90\,000, 9000, 900, 90\ldots)$

a) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, $a_n = 2 \cdot 2^{(n-1)}$.

Por tanto, $a_{10} = 2 \cdot 2^{(10-1)} = 1024$.

b) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, $b_n = 90\,000 \cdot 0{,}1^{(n-1)}$.

Por tanto, $b_{10} = 90\,000 \cdot 0{,}1^{(10-1)} = 9 \cdot 10^{-5}$

23. Calcula el término general de una progresión geométrica en la que no hay términos negativos si a_3 = 0,9 y a_{12} = 17 714,7.

Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, se obtiene este sistema:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 \cdot r^2 \\ a_{12} = a_1 \cdot r^{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}9 = a_1 \cdot r^2 \\ 17\,714{,}7 = a_1 \cdot r^{11} \end{cases} \Rightarrow \frac{17\,714{,}7}{0{,}9} = \frac{a_1 \cdot r^{11}}{a_1 \cdot r^2} \Rightarrow 19\,683 = r^9 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow a_1 = 0{,}1$$

El término general es $a_n = 0{,}1 \cdot 3^{(n-1)}$.

24. Actividad interactiva

25. Calcula la suma de los 20 primeros términos de una progresión geométrica con a_1 = 5 y r = –2.

El término general es $a_n = 5 \cdot (-2)^{(n-1)}$.

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{20} = 5 \cdot (-2)^{19} = -2\,621\,440 \end{cases} \Rightarrow S_{20} = \frac{a_{20} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{-2\,621\,440 \cdot (-2) - 5}{-2 - 1} = -1\,747\,625$$

La suma de los 20 primeros términos es –1 747 625.

26. Calcula la suma de los diez primeros términos de las sucesiones:

a) (a_n) **= (0,001, 0,003, 0,009…)** **b)** (b_n) **= (1, 4, 16, 64…)** **c)** $(c_n) = \left(1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125} ...\right)$

a) (a_n) = (0,001, 0,003, 0,009…) $\Rightarrow a_n = 0{,}001 \cdot 3^{(n-1)}$

$$\begin{cases} a_1 = 0{,}001 \\ a_{10} = 0{,}001 \cdot 3^9 = 19{,}683 \end{cases} \Rightarrow S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{19{,}683 \cdot 3 - 0{,}001}{3 - 1} = 29{,}524$$

b) (b_n) = (1, 4, 16, 64…) $\Rightarrow b_n = 4^{(n-1)}$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{10} = 4^9 = 262\,144 \end{cases} \Rightarrow S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{262\,144 \cdot 4 - 1}{4 - 1} = 349\,525$$

c) $(c_n) = \left(1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125} ...\right) \Rightarrow c_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{(n-1)}$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{10} = \left(\frac{1}{5}\right)^9 = \frac{1}{1\,953\,125} \end{cases} \Rightarrow S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{\frac{1}{1\,953\,125} \cdot \frac{1}{5} - 1}{\frac{1}{5} - 1} = 1{,}25$$

27. Calcula:

a) La suma de las veinte primeras potencias de 2.

b) La suma de las veinte primeras potencias de $\frac{1}{2}$.

a) (a_n) = (1, 2, 4, 8, 16…) $\Rightarrow a_n = 2^{(n-1)}$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{20} = 2^{19} = 524\,288 \end{cases} \Rightarrow S_{20} = \frac{a_{20} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{524\,288 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 1\,048\,575$$

b) $(b_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} ...\right)$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{1}{524\,288} \end{cases} \Rightarrow S_{20} = \frac{a_{20} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{\frac{1}{524\,288} \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2$$

28. Calcula estas dos sumas infinitas:

a) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...$ **b)** **0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + …**

a) Los sumandos corresponden a los términos de la progresión geométrica cuyo primer término a_1 es 1 y, su razón, $r=\frac{1}{4} \Rightarrow S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

b) Los sumandos corresponden a los términos de la progresión geométrica cuyo primer término a_1 es 0,1 y, su razón, r = 0,1 $\Rightarrow S_\infty = \frac{0{,}1}{1-0{,}1} = \frac{1}{9}$

29. Escribe los cuatro primeros términos de estas sucesiones y calcula también el décimo término.

a) $a_n = \frac{n^2}{n+2}$ **b)** $b_n = n^2 + 3n$ **c)** $c_n = (n+1)\cdot(n-1)$ **d)** $d_n = 100 - 15n$

a) $a_1 = \frac{1^2}{1+2} = \frac{1}{3}$ **b)** $b_1 = 1 + 3 = 4$ **c)** $c_1 = 2 \cdot 0 = 0$ **d)** $d_1 = 100 - 15 = 85$

$a_2 = \frac{2^2}{2+2} = 1$ $b_2 = 4 + 6 = 10$ $c_2 = 3 \cdot 1 = 3$ $d_2 = 100 - 30 = 70$

$a_3 = \frac{3^2}{3+2} = \frac{9}{5}$ $b_3 = 9 + 9 = 18$ $c_3 = 4 \cdot 2 = 8$ $d_3 = 100 - 45 = 55$

$a_4 = \frac{4^2}{4+2} = \frac{8}{2}$ $b_4 = 16 + 12 = 28$ $c_4 = 5 \cdot 3 = 15$ $d_4 = 100 - 60 = 40$

$a_{10} = \frac{10^2}{10+2} = \frac{25}{3}$ $b_{10} = 100 + 30 = 130$ $c_{10} = 11 \cdot 9 = 99$ $d_{10} = 100 - 150 = -50$

30. Encuentra el término general de estas sucesiones.

a) (a_n) **= (30, 27, 24, 21…)** **c)** (c_n) **= (–1, 1, 3, 5…)**

b) (b_n) **= (0, 1, 4, 9…)** **d)** (d_n) **= (2; 1; 0,5; 0,25…)**

a) Es una progresión aritmética cuyo primer término es 30 y la diferencia –3 $\Rightarrow$ $a_n = 30 + (n-1)\cdot(-3) = 33 - 3n$.

b) Es una sucesión cuyos términos se obtienen elevando al cuadrado $n-1$ $\Rightarrow$ $b_n = (n-1)^2$.

c) Es una progresión aritmética cuyo primer término es –1 y la diferencia 2 $\Rightarrow$ $c_n = -1 + (n-1)\cdot 2 = 2n - 3$.

d) Es una progresión geométrica cuyo primer término es 2 y la razón $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $d_n = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-2}}$.

31. El primer término de una sucesión es $a_1 = 5$ y se cumple que $a_n = 2a_{n-1} - 3$.

a) Escribe los seis primeros términos de la sucesión.

b) Comprueba que el término general de la sucesión es $a_n = 2^n + 3$.

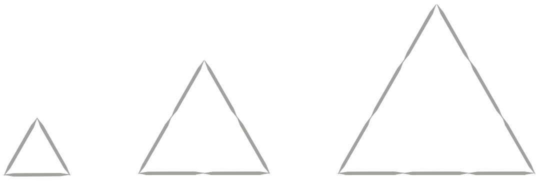
a) $a_1 = 5$ $a_4 = 2a_3 - 3 = 2 \cdot 11 - 3 = 19$

$a_2 = 2a_1 - 3 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$ $a_5 = 2a_4 - 3 = 2 \cdot 19 - 3 = 35$

$a_3 = 2a_2 - 3 = 2 \cdot 7 - 3 = 11$ $a_6 = 2a_5 - 3 = 2 \cdot 35 - 3 = 67$

b) $a_n = 2a_{n-1} - 3 = 2\cdot(2a_{n-2} - 3) - 3 = 2^2\cdot a_{n-2} - 2\cdot 3 - 3 = 2^2\cdot a_{n-2} - 3\cdot(2+1) = 2^2\cdot(2a_{n-3} - 3) - 3\cdot(2+1) =$
$= 2^3\cdot a_{n-3} - 3\cdot 2^2 - 3\cdot(2+1) = 2^3\cdot a_{n-3} - 3\cdot(2^2+2+1) = \ldots = 2^{(n-1)}\cdot a_1 - 3(2^{(n-2)} + 2^{(n-3)} + \ldots + 2^2 + 2 + 1) =$
$= 2^{(n-1)}\cdot a_1 - 3\cdot\frac{2^{(n-2)}\cdot 2 - 1}{2-1} = 2^{(n-1)}\cdot 5 - 3\cdot(2^{(n-1)} - 1) = 2^{(n-1)}\cdot 5 - 3\cdot 2^{(n-1)} + 3 = 2^{(n-1)}\cdot(5-3) + 3 = 2^n + 3.$

32. A Matilde le han regalado una caja de palillos y se entretiene haciendo triángulos como los de la figura.



Cuando lleva 99 triángulos se pregunta, ¿cuántos palillos necesitaré para hacer el triángulo número 100 y terminar mi gran obra?

Para el primer triángulo necesita 3 palillos, para el segundo 6, para el tercero 9… El número de palillos necesarios para formar los sucesivos triángulos forman la sucesión $(a_n) = (3, 6, 9…)$. Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 3 y, la diferencia, 3.

$$(a_n) = (3, 6, 9...) \Rightarrow a_n = 3 + (n - 1) \cdot 3 = 3n \Rightarrow a_{100} = 3 \cdot 100 = 300$$

Matilde necesitará 300 palillos para hacer el triángulo número 100.

33. Encuentra el término general de estas progresiones aritméticas y calcula el término que ocupa el lugar décimo.

a) $(a_n) = (7, 10, 13, 16…)$ **b)** $(c_n) = (9, 5, 1, -3…)$ **c)** $(d_n) = (-8, -6, -4, -2…)$

a) Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 7 y su diferencia 3.

$a_n = 7 + (n - 1) \cdot 3 = 4 + 3n \Rightarrow a_{10} = 4 + 3 \cdot 10 = 34$

b) Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 9 y su diferencia –4.

$a_n = 9 + (n - 1) \cdot (-4) = 13 - 4n \Rightarrow a_{10} = 13 - 4 \cdot 10 = -27$

c) Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es –8 y su diferencia 2.

$a_n = -8 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 10 \Rightarrow a_{10} = 20 - 10 = 10$

34. Halla el término general de estas progresiones aritméticas y calcula después el término que ocupa el quincuagésimo lugar.

a) $a_1 = 3, d = 5$ **b)** $b_1 = -7, d = -1$ **c)** $c_1 = 5, d = -4$ **d)** $d_1 = -10, d = 2$

a) $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 2 \Rightarrow a_{50} = 250 - 2 = 248$

b) $b_n = -7 + (n - 1) \cdot (-1) = -n - 6 \Rightarrow b_{50} = -50 - 6 = -56$

c) $c_n = 5 + (n - 1) \cdot (-4) = 9 - 4n \Rightarrow c_{50} = 9 - 200 = -191$

d) $d_n = -10 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 12 \Rightarrow d_{50} = 100 - 12 = 88$

35. Halla el término general de estas progresiones aritméticas y calcula después el término que ocupa el cuadragésimo lugar.

a) $a_5 = 3, d = 7$ **b)** $b_6 = 0, d = 2$ **c)** $c_9 = 100, d = -5$ **d)** $d_{15} = 8, d = 3$

a) $a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot d \Rightarrow 3 = a_1 + 4 \cdot 7 \Rightarrow a_1 = -25 \Rightarrow a_n = -25 + (n - 1) \cdot 7 = 7n - 32 \Rightarrow a_{40} = 280 - 32 = 248$

b) $b_6 = a_1 + (6 - 1) \cdot d \Rightarrow 0 = b_1 + 5 \cdot 2 \Rightarrow b_1 = -10 \Rightarrow b_n = -10 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 12 \Rightarrow b_{40} = 80 - 12 = 68$

c) $c_9 = c_1 + (9 - 1) \cdot d \Rightarrow 100 = c_1 + 8 \cdot (-5) \Rightarrow c_1 = 140 \Rightarrow c_n = 140 + (n - 1) \cdot (-5) = -5n + 145 \Rightarrow b_{40} = -55$

d) $d_{15} = d_1 + (15 - 1) \cdot d \Rightarrow 8 = d_1 + 14 \cdot 3 \Rightarrow d_1 = -34 \Rightarrow d_n = -34 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 37 \Rightarrow d_{40} = 120 - 37 = 83$

36. ¿Cuánto suman los primeros 30 múltiplos de 5?

Los primeros 30 múltiplos de 5 forman la progresión aritmética $(a_n) = (0, 5, 10…)$ cuyo primer término es 0 y la diferencia 5.

$$a_n = 0 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 5 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{10} = 150 - 5 = 145 \end{cases} \Rightarrow S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{0 + 145}{2} \cdot 30 = 2175$$